ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

5.5 Άμεσες συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

Θεωρία

Α Σταθερή συνάρτηση

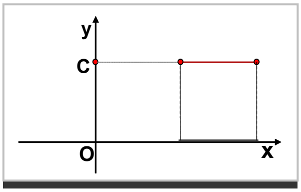
Έστω μια συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορισμένη σε ένα διάστημα $\mathbf{\Delta}$

Αν η $\mathbf{f}$ είναι **συνεχής** στο $\mathbf{\Delta}$

και $\mathbf{f'(x) = 0}$ για κάθε εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}$ του $\mathbf{\Delta}$

τότε η $\mathbf{f}$ είναι **σταθερή** σε όλο το διάστημα $\mathbf{\Delta}$

Δηλαδή, υπάρχει $\mathbf{c \in R}$, ώστε $\mathbf{f(x) = c}$, για κάθε $\mathbf{x \in \Delta}$



Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $\mathbf{x_1, x_2 \in \Delta}$ ισχύει $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$

Αν $\mathbf{x_1 = x_2}$, προφανώς $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$

Αν $\mathbf{x_1 < x_2}$, τότε στο $\mathbf{[x_1, x_2]}$ η $\mathbf{f}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

Επομένως, υπάρχει $\mathbf{\xi \in (x_1, x_2)}$, τέτοιο ώστε $\mathbf{f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$

Επειδή το $\mathbf{\xi}$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbf{\Delta}$, θα είναι $\mathbf{f'(\xi) = 0}$

Οπότε, η σχέση $\mathbf{f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$, δίνει $\mathbf{f(x_1) - f(x_2) = 0}$ ή $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$

Αν $\mathbf{x_2 < x_1}$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, είναι $\mathbf{f(x_1) = f(x_2)}$

Αν $\mathbf{f'(x) - 2x = 0}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$ και $\mathbf{f(0) = 1}$

τότε και $\mathbf{\left(f(x) - x^2\right)' = 0}$ ή $\mathbf{f(x) - x^2 = c}$

Επειδή $\mathbf{f(0) = 1}$, η σχέση $\mathbf{f(x) - x^2 = c}$, γίνεται $\mathbf{f(0) - 0 = c}$ ή $\mathbf{c = 1}$

Δηλαδή $\mathbf{f(x) - x^2 = 1}$ ή $\mathbf{f(x) = x^2 + 1}$

Να βρείτε την $\mathbf{f}$, αν $\mathbf{f'(x) - \eta\mu x = 0}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$ και $\mathbf{f(0) = 0}$

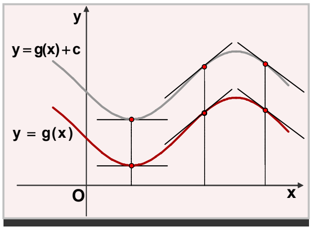
Το παραπάνω θεώρημα ισχύει σε **διάστημα** και όχι σε **ένωση διαστημάτων** !

Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 & , \quad x<0 \\ 1 & , \quad x>0\end{cases}$

Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\neq 0$, τότε η f **δεν** είναι **σταθερή** στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

αφού γενικότερα είναι $f(x)=\begin{cases}c_1 & \text{αν} \quad x<0 \\ c_2 & \text{αν} \quad x>0\end{cases}$

Β Ισότητα παραγώγων



Έστω δυο συναρτήσεις f,g

ορισμένες σε ένα διάστημα Δ

Αν οι f,g είναι συνεχείς στο Δ

και $f'(x)=g'(x)$

για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε υπάρχει **σταθερά** c, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)=g(x)+c$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$

ισχύει $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ

Άρα, υπάρχει σταθερά c, ώστε για κάθε $x\in\Delta$, να ισχύει $f(x)-g(x)=c$

Οπότε, τελικά είναι $f(x)=g(x)+c$

Αν $f'(x)=2x$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

τότε θα είναι και $(f(x))'=(x^2)'$ ή $f(x)=x^2+c$ και από $f(0)=1$, είναι και $1=c$

Οπότε $f(x)=x^2+1$

Να βρείτε την f, αν είναι $f'(x)=1-\eta\mu x$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$

Προσοχή, αυτό το θεώρημα ισχύει σε διάστημα και όχι σε ένωση διαστημάτων.

Γ Ισότητα παραγώγου με την αρχική της

Αποδεικνύεται, ότι αν $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$, θα είναι $f(x)=ce^x$, $c\in R$

Αν $f'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

τότε θα είναι $f(x)=ce^x$ και από $f(0)=1$ είναι $1=ce^0$ ή $1=c$, δηλαδή $f(x)=e^x$

Αν $2f'(2x)=f(2x)$ για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$, δείξτε ότι $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$

Μεθοδολογία

α Εύρεση συνάρτησης

Εδώ προσπαθούμε: **ή να «χτίσουμε» σιγά-σιγά και από την υπόθεση να φτάσουμε στην εύρεση της συνάρτησης**

Αυτό γίνεται καταλήγοντας

ή σε μία σχέση της μορφής $(f(x))' = 0$ …όπου το x ανήκει σε διάστημα.

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση f / R, ώστε $f'(x) - 2x + 1 = 0$ με $f(0) = 0$

Από $f'(x) - 2x + 1 = 0$, είναι και $\left(f(x) - x^2 + x\right)' = 0$

Δηλαδή, η συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^2 + x$ είναι **σταθερή**.

Δηλαδή, είναι $h(x) = c$ με $c \in R$

Συμπερασματικά, έχουμε $f(x) - x^2 + x = c$

Από $f(0) = 0$ είναι $f(0) - 0^2 + 0 = c$ είναι $c = 0$ …δηλαδή $f(x) - x^2 + x = 0$

ή $f(x) = x^2 - x$

ή σε μία σχέση της μορφής $(f(x))' = (g(x))'$ …όπου το x ανήκει σε διάστημα.

που στην ουσία είναι η προηγούμενη μορφή.

Παράδειγμα 2

Έστω η παραγωγίσιμη στο R_+ συνάρτηση f, ώστε $e^x f'(x) + e^x f(x) = 1 - συνx$ και $f'(0) = -1$

Από $e^x f'(x) + e^x f(x) = 1 - συνx$

είναι $\left(e^x f(x)\right)' = (x - ημx)'$ …άρα και $e^x f(x) = x - ημx + c$

Από $e^x f'(x) + e^x f(x) = 1 - συνx$

για $x = 0$, είναι $e^0 f'(0) + e^0 f(0) = 1 - συν0$ ή $f'(0) + f(0) = 0$ ή $f(0) = 1$

Οπότε, από $e^x f(x) = x - ημx + c$ για $x = 0$ είναι $e^0 f(0) = 0 - ημ0 + c \Leftrightarrow c = 1$

Δηλαδή, είναι $e^x f(x) = x - ημx + 1$ ή $f(x) = \dfrac{x - ημx + 1}{e^x}$

ή σε μία σχέση της μορφής $(\mathbf{f(x)})' = \mathbf{f(x)}$ ...όπου το $\mathbf{x}$ ανήκει σε διάστημα.

Παράδειγμα 3

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbf{\Delta = (0,\pi)}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

ώστε $\mathbf{συνx \cdot f(x) + ημx \cdot f'(x) = ημx \cdot f(x)}$ και $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$

Από $συνx \cdot f(x) + ημx \cdot f'(x) = ημx \cdot f(x)$, είναι και $(ημx \cdot f(x))' = ημx \cdot f(x)$

Οπότε, είναι $\mathbf{ημx \cdot f(x) = c \cdot e^x}$, με $\mathbf{c \in R}$

Από $\mathbf{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1}$ και $ημ\frac{\pi}{2} \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) = c \cdot e^{\frac{\pi}{2}}$, είναι $1 = c \cdot e^{\frac{\pi}{2}}$ ή $\mathbf{c = e^{-\frac{\pi}{2}}}$

Οπότε $\mathbf{ημx \cdot f(x) = e^{-\frac{\pi}{2}} e^x}$ ή $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^{x-\frac{\pi}{2}}}{ημx}}$ με $\mathbf{x \in (0,\pi)}$

ή προσπαθούμε: **να θεωρήσουμε συνάρτηση και παραγωγίζοντας να φτάσουμε ότι η παράγωγός της είναι Μηδέν δηλαδή η συνάρτηση είναι σταθερή και τελικά να την βρούμε.**

Παράδειγμα 4

Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$, ώστε $\mathbf{f'(x)f(x) = g'(x)}$, $\mathbf{x \in R}$

και $\mathbf{f^2(0) = 2g(0)}$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{f^2(x) = 2g(x)}$, $\mathbf{x \in R}$

Πραγματικά

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{h(x) = f^2(x) - 2g(x)}$

Είναι $\mathbf{h'(x) = 2f'(x)f(x) - 2g'(x) = 2(f'(x)f(x) - g'(x)) = 0}$

Οπότε, η $\mathbf{h}$ είναι σταθερή, δηλαδή είναι $\mathbf{h(x) = c}$

Επειδή είναι $h(0) = f^2(0) - 2g(0) = 0$, θα είναι $\mathbf{c = 0}$ ...δηλαδή $\mathbf{h(x) = 0}$

$f^2(x) - 2g(x) = 0$

ή $\mathbf{f^2(x) = 2g(x)}$

Φυσικά, θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με το προηγούμενο σκεπτικό τα οποίο είναι γενικότερο, αφού δεν χρειάζεται να ξέρουμε τη συνάρτηση.

Ότι ισχύει στην περίπτωση που $f'(x)=0$

αναλογικά ισχύει και για την f''

Δηλαδή, αν καταλήξουμε σε μία σχέση της μορφής $f''(x)=0$

όπου το x ανήκει σε διάστημα

θα είναι $f'(x)=c$ ή $(f(x))'=(cx)'$ ή $f(x)=cx+c_o$ με $c,c_o\in R$

Παράδειγμα 5

Θα βρούμε τη συνάρτηση f, αν $f''(x)=0$, με $f(0)=1$ και $f'(0)=1$

Πραγματικά

Από $f''(x)=0$, είναι και $f'(x)=c$

Επειδή όμως είναι $f'(0)=1$, από $f'(x)=c$ για $x=0$, είναι $f'(0)=c$ ή $c=1$

Οπότε $f'(x)=1$

Είναι $(f(x))'=(x)'$

Άρα και $f(x)=x+c$

Επειδή όμως είναι $f(0)=1$, από $f(x)=x+c$, για $x=0$ είναι $f(0)=c$ ή $c=1$

Οπότε $f(x)=x+1$, για κάθε $x\in R$

Παράδειγμα 6

Αν $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in R$, με $f(0)=g(0)$ και $f(1)=g(1)$, τότε $f(x)=g(x)$

Πραγματικά

Από $f''(x)=g''(x)$, είναι και $(f'(x))'=(g'(x))'$ ή $f'(x)=g'(x)+c_1$

Επίσης

από $f'(x)=g'(x)+c_1$ είναι και $(f(x))'=(g(x)+c_1x)'$ ή $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$

Για $x=0$, η σχέση $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$ δίνει $f(0)=g(0)+c_2$ ή $c_2=0$

Για $x=1$, η σχέση $f(x)=g(x)+c_1x+c_2$ δίνει $f(1)=g(1)+c_1+c_2$ ή $c_1=0$

Οπότε $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in R$

Όπως ξέρουμε, αν φτάσουμε στη σχέση $f'(x) = f(x)$, θα είναι $f(x) = ce^x$
όπου το x ανήκει σε διάστημα

Το ίδιο συμβαίνει, αν φτάσουμε στη σχέση $(f(x)+g(x))' = f(x)+g(x)$

όπου τότε πρέπει $f(x)+g(x) = ce^x$

Παράδειγμα 7

Αν $f'(x) - f(x) = x - 1$, για κάθε $x \in R$ και $f(0) = 1$, θα **προσδιορίσουμε** την f

Πραγματικά

Είναι $f'(x) - f(x) = x - 1$ ή $f'(x)+1 = f(x)+x$ ή $(f(x)+x)' = f(x)+x$

Οπότε $f(x)+x = ce^x$

Για $x = 0$, προκύπτει $c = 1$ και τελικά $f(x) = e^x - x$

Όταν δίνεται η σχέση $f'(x) + g'(x)f(x) = 0$, πολλαπλασιάζουμε με $e^{g(x)}$
όπου το x ανήκει σε διάστημα

και έχουμε $f'(x)e^{g(x)} + g'(x)e^{g(x)}f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(f(x)\cdot e^{g(x)}\right)' = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{g(x)} = c$

ή $f(x) = \dfrac{c}{e^{g(x)}}$

Παράδειγμα 8

Θα βρούμε τη συνάρτηση f, αν $f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$, με $f(0) = 1$

Πραγματικά

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(x) + 2f(x) = 0 &\Leftrightarrow f'(x) + (2x)'f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x)e^{2x} + (2x)'e^{2x}f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(f(x)e^{2x}\right)' = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x)e^{2x} = c \end{aligned}$$

Για $x = 0$, προκύπτει $c = 1$ και έτσι $f(x)e^{2x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}} \Leftrightarrow f(x) = e^{-2x}$

Όπως έχουμε αναφέρει

στην περίπτωση που καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής $f'(x)=0$

όπου το x **δεν ανήκει** σε διάστημα

τότε η f δεν θα είναι σταθερή, αλλά ένωση σταθερών.

Όμοια, **αν** $f'(x)=g'(x)$ **ή αν** $f'(x)=f(x)$

Παράδειγμα 9

Θα βρούμε τη συνάρτηση $f:R\to R$ με $(x-1)f'(x)=4x^2-3x-1$, $x\in R$ και $f(0)=3$

Πραγματικά

Για $x\neq 1$, έχουμε $f'(x)=\dfrac{4x^2-3x-1}{x-1}=\dfrac{\cancel{4(x-1)}\left(x+\frac{1}{4}\right)}{\cancel{x-1}}=4x+1$

για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

Οπότε $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+c_1 & \text{αν} \quad x<1\\ \alpha & \text{αν} \quad x=1\\ 2x^2+x+c_2 & \text{αν} \quad x>1\end{cases}$

Είναι $f(0)=3$, οπότε $2\cdot 0^2+0+c_1=3$ ή $c_1=3$

Επειδή η f είναι και **παραγωγίσιμη**, θα είναι και **συνεχής**.

Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\ \Leftrightarrow\ 2+1+c_1=2+1+c_2=\alpha$

$\Leftrightarrow\ c_1=c_2=\alpha-3$

$\Leftrightarrow\ c_1=c_2=3$ και $\alpha=6$

Επιπλέον είναι $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=2+1+3=6$

Τελικά είναι $f(x)=\begin{cases}2x^2+x+3 & \text{αν} \quad x<1\\ 6 & \text{αν} \quad x=1\\ 2x^2+x+3 & \text{αν} \quad x>1\end{cases}$

ή $f(x)=2x^2+x+3$

Ας δούμε τα πιο κάτω θέματα.

Θέμα 1

Έστω οι συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$ για τις οποίες ισχύουν $\mathbf{f(0) = 0}$ και $\mathbf{g(0) = 1}$

Επίσης είναι $\mathbf{g'(x) = -f(x)}$ και $\mathbf{f'(x) = g(x)}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Θα αποδείξουμε ότι α) $\mathbf{f^2(x) + g^2(x) = 1}$

β) $\mathbf{f(x) = \eta\mu x}$ και $\mathbf{g(x) = \sigma\upsilon\nu x}$ $\dots \mathbf{x \in R}$

Απάντηση

α) Είναι $\left(\mathbf{f^2(x) + g^2(x)}\right)' = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x)$

$$= 2f(x)g(x) + 2g(x)\left(-f(x)\right)$$

$$= 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = \mathbf{0}$$

Άρα $\mathbf{f^2(x) + g^2(x) = c}$

Για $\mathbf{x = 0}$, έχουμε $\mathbf{f^2(0) + g^2(0) = c \iff 0 + 1 = c \iff c = 1}$

Τελικά $\mathbf{f^2(x) + g^2(x) = 1}$

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbf{f(x) - \eta\mu x = 0}$ και $\mathbf{g(x) - \sigma\upsilon\nu x = 0}$

ή ισοδύναμα $\mathbf{(f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 0}$

Θωρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{G(x) = (f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2}$

Είναι $\mathbf{G'(x) = 2(f(x) - \eta\mu x)(f'(x) - \sigma\upsilon\nu x) + 2(g(x) - \sigma\upsilon\nu x)(g'(x) + \eta\mu x)}$

$$\mathbf{= 2(f(x) - \eta\mu x)(g(x) - \sigma\upsilon\nu x) + 2(g(x) - \sigma\upsilon\nu x)(-f(x) + \eta\mu x)}$$

$$= \cancel{2f(x)g(x)} - \cancel{2f(x)\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{2\eta\mu x g(x)} + \cancel{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x} - \cancel{2f(x)g(x)} + \cancel{2f(x)\sigma\upsilon\nu x} + \cancel{2\eta\mu x g(x)} - \cancel{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}$$

$$= \mathbf{0}$$

Άρα $\mathbf{G(x) = c}$

Όμως $\mathbf{G(0) = 0 \iff c = 0}$

Οπότε $\mathbf{(f(x) - \eta\mu x)^2 + (g(x) - \sigma\upsilon\nu x)^2 = 0} \iff \mathbf{f(x) = \eta\mu x}$ και $\mathbf{g(x) = \sigma\upsilon\nu x}$ $\dots \mathbf{x \in R}$

Θέμα **2**

Έστω οι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f}, \mathbf{g}$

ώστε $\mathbf{f(x)g'(x) = f'(x)g(x)}$ **(*)** για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Το $\mathbf{0}$ να είναι η **μοναδική ρίζα** της $\mathbf{g}$ και $\mathbf{f(1) = g(1)}$ και $\mathbf{f(-1) = -g(-1)}$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{g(x)} & \text{αν} \quad \mathbf{x \geq 0} \\ -\mathbf{g(x)} & \text{αν} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$

Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbf{0}$ είναι η **μοναδική ρίζα** και της συνάρτησης $\mathbf{f}$

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{f'(0) = g'(0) = 0}$

Απάντηση

Από τη σχέση **(*)** για κάθε $\mathbf{x \neq 0}$, είναι $\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} = 0$ ή $\left(\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}}\right)' = \mathbf{0}$

Οπότε $\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \begin{cases} \mathbf{c_1} & \text{αν} \quad \mathbf{x > 0} \\ \mathbf{c_2} & \text{αν} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$

και από $\mathbf{f(1) = g(1)}$ προκύπτει $\mathbf{c_1 = 1}$ και από $\mathbf{f(-1)=-g(-1)}$ προκύπτει $\mathbf{c_2 = -1}$

Οπότε $\dfrac{\mathbf{f(x)}}{\mathbf{g(x)}} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{αν} \quad \mathbf{x > 0} \\ -\mathbf{1} & \text{αν} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$ ή $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{g(x)} & \text{αν} \quad \mathbf{x > 0} \\ -\mathbf{g(x)} & \text{αν} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$

Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{0}$, θα είναι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$

ή $\mathbf{\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-g(x)) = f(0)}$

Επειδή η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι **συνεχής** στο $\mathbf{x_o = 0}$, θα είναι $\mathbf{g(0) = -g(0) = f(0)}$

Έτσι, διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{g(0) = f(0) = 0}$ και τελικά $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{g(x)} & \text{αν} \quad \mathbf{x \geq 0} \\ -\mathbf{g(x)} & \text{αν} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$ **/R**

Είναι φανερό ότι το $\mathbf{0}$ σαν **μοναδική ρίζα** της συνάρτησης $\mathbf{g}$

είναι προφανώς και **μοναδική ρίζα** της $\mathbf{f}$, αφού $\mathbf{|f(x)| = g(x) \neq 0}$ ...για κάθε $\mathbf{x \neq 0}$

Από $\mathbf{f'(0)} = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{g(x)}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right) = \mathbf{g'(0)}$

και $\mathbf{f'(0)} = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim\limits_{x \to 0^-}\left(\dfrac{-g(x)}{x}\right) = -\lim\limits_{x \to 0^-}\left(\dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}\right) = \mathbf{-g'(0)}$

είναι $\mathbf{g'(0) = -g'(0)} \Leftrightarrow \mathbf{2g'(0) = 0} \Leftrightarrow \mathbf{g'(0) = 0} \Leftrightarrow \mathbf{f'(0) = g'(0) = 0}$

Θέμα 3

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{(1+x^2)f''(x)+4xf'(x)+2f(x)=0}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ με $\mathbf{f(0)=1}$ και $\mathbf{f'(0)=0}$

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=(1+x^2)f'(x)+2xf(x)}$ είναι **σταθερή**.

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{h(x)=(x^2+1)f(x)}$ είναι **σταθερή**.

Θα βρούμε τη συνάρτηση $\mathbf{f}$

Απάντηση

$$\begin{aligned}\text{Είναι}\quad \mathbf{g'(x)} &= \mathbf{\big((x^2+1)f'(x)+2xf(x)\big)'}\\ &= \mathbf{(x^2+1)'f'(x)+(x^2+1)f''(x)+2f(x)+2xf'(x)}\\ &= \mathbf{2xf'(x)+(x^2+1)f''(x)+2f(x)+2xf'(x)}\\ &= \mathbf{4xf'(x)+(x^2+1)f''(x)+2f(x)}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Συνεπώς, η $\mathbf{g}$ είναι σταθερή, με $\mathbf{g(x)\equiv g(0)=0}$

Από $\mathbf{g(x)=0}$, είναι $\mathbf{(1+x^2)f'(x)+2xf(x)=0}$ ή $\mathbf{\big((1+x^2)f(x)\big)'=0}$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\mathbf{h(x)=(x^2+1)f(x)}$ είναι **σταθερή**, με $\mathbf{h(x)\equiv h(0)=f(0)=1}$

Από $\mathbf{h(x)=1}$, είναι $(x^2+1)f(x)=1$ ή $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}}$, $\mathbf{x\in R}$

Θέμα 4

Αν $\mathbf{|f(x)-f(x_o)|\le(x-x_o)^2}$ για κάθε $\mathbf{x,x_o\in R}$, τότε η $\mathbf{f}$ είναι **σταθερή**

Απάντηση

Από $\mathbf{|f(x)-f(x_o)|\le(x-x_o)^2}$ είναι και $|f(x)-f(x_0)|\le|x-x_o|^2$

ή $|f(x)-f(x_o)|\le|x-x_o||x-x_o|$

ή $0\le\left|\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right|\le|x-x_o|$, για κάθε $x\ne x_o$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_o}0=0$ και $\lim\limits_{x\to x_o}|x-x_o|=0$

είναι $\lim\limits_{x\to x_o}\left|\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right|=0$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)=0$ ή $\mathbf{f'(x_o)=0}$, για κάθε $\mathbf{x_o\in R}$

Οπότε $\mathbf{f'(x)=0}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ …και συνεπώς $\mathbf{f(x)=c}$, $\mathbf{c\in R}$

Θέμα **5**

Έστω η $\mathbf{f/R}$ ώστε $\mathbf{f(x)f(y)=f(x+y)}$, για κάθε $\mathbf{x,y\in R}$, με $\mathbf{f(R)=R_+^*}$

Η $\mathbf{f}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{x_o=0}$, με $\mathbf{f'(0)=1}$

α) Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{f(0)=1}$

β) Θα αποδείξουμε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}$

γ) Θα **βρούμε** την $\mathbf{f}$

Απάντηση

α) Η σχέση $\mathbf{f(x)f(y)=f(x+y)}$ για $\mathbf{x=y=0}$, δίνει $\mathbf{f(0)f(0)=f(0)}$ ή $\mathbf{f(0)=1}$

…αφού $\mathbf{f(x)>0}$

β) Τώρα αν είναι $\mathbf{f'(0)=1}$, δηλαδή αν είναι $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right)=1$

θα αποδείξουμε ότι υπάρχει το όριο $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)\in R$

Πραγματικά

Είναι $\mathbf{\lim\limits_{x\to x_o}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)}=\lim\limits_{x-x_o\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)$

Θέτουμε $\mathbf{x-x_o=y}$

ή $\mathbf{x=x_o+y}$

$$=\lim_{y\to 0}\left(\frac{f(x_o+y)-f(x_o)}{y}\right)$$ …στην ουσία είναι ο άλλος ορισμός.

Μετονομάζουμε το $\mathbf{y}$ σε $\mathbf{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x_o+x)-f(x_o)}{x}\right)$$

Με βάση τώρα την αρχική σχέση

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x_o)f(x)-f(x_o)}{x}\right)$$

$$=f(x_o)\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)=f(x_o)\cdot f'(0)=f(x_o)\equiv \mathbf{f'(x_o)}$$

Δηλαδή, διαπιστώσαμε ότι $\mathbf{f'(x)=f(x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$

γ) Οπότε $\mathbf{f(x)=c\cdot e^x}$ και επειδή $\mathbf{f(0)=1}$, διαπιστώνουμε ότι $\mathbf{c=1}$

Δηλαδή $\mathbf{f(x)=e^x}$

Ασκήσεις

α.1● Αν $f'(x)=e^x-1$, με $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x$

α.2● Αν $f'(x)=xe^x+e^x$, με $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=xe^x$

α.3● Αν $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

α.4● Αν $x^2f'(x)+2xf(x)=\eta\mu x$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=0$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x^2} & \text{αν} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{αν} \quad x=0\end{cases}$

α.5● Αν για την ορισμένη στο R_+ συνάρτηση f, είναι $e^x=xf'(x)+f(x)$, $x\in R$

να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & \text{αν} \quad x>0\\ 1 & \text{αν} \quad x=0\end{cases}$

α.6● Αν $f'(x)=g(x)$ και $g'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$, $g(0)=1$

να αποδείξετε ότι $f^2(x)=g^2(x)$

α.7● Έστω ότι $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x\in R$

α) Αν $f'(0)=g'(0)+1$ και $f(0)=g(0)$, να **βρείτε** τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

β) Αν $f(1)=g(1)$ και $f(0)=g(0)+1$, να **βρείτε** τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$

α.8● Αν $f'''(x)=g'''(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f'(0)=g'(0)$, $f(0)=g(0)$

να αποδείξετε ότι $f(x)-g(x)=\alpha x^2$ …όπου α κάποιος πραγματικός αριθμός.

α.9● Αν $f(x)f'(x)=4x^3$ με $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $|f(1)|=\sqrt{2}$

α.10● Αν $f'(x)=2xf(x)$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=-1$

αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-x^2}$ είναι **σταθερή**, να **βρείτε** την f

α.11● Να **βρείτε** τη συνάρτηση f, αν $xf'(x)=3x^3-2x^2$, για κάθε $x\in R$

και ξέρουμε επίσης ότι είναι $f(1)=-1$

α.12● Αν $|f(x)-f(x_o)|\le(x-x_o)^4$, για κάθε $x,x_o\in R$, να αποδείξετε ότι $f(x)=f(0)$

α.13● Αν $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$, για κάθε $x,y\in R$ και $f'(0)=1$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι **παραγωγίσιμη** στο R και να **βρείτε** την f

α.14● Να βρείτε την f

αν α) $f'(x)συνx-f(x)ημx=e^x$, με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=1$

β) $f'(x)συνx+f(x)ημx=συν^3x$, με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=0$

γ) $f'(x)συνx-f(x)ημx=συνxf(x)$, με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $f(0)=1$

δ) $xe^xf'(e^x)=1$, με $x>1$, $f(e^2)=\ln 2$

α.15● Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}f(x)$, για κάθε $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(α)}{α^2+1}=\frac{f(β)}{β^2+1}$, για κάθε $α,β\in R$

β) Αν ξέρουμε ότι η f έχει **τουλάχιστον μία ρίζα**, να αποδείξετε ότι $f(x)=0$

α.16● Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f'(x)+f(x)=1$, για κάθε $x\in R$

Αν γνωρίζουμε ότι $f(1)=2$, να αποδείξετε ότι $f(x)=1+e^{1-x}$, για κάθε $x\in R$

α.17● Έστω η συνάρτηση f, ώστε $f''(x)+4f'(x)+3f(x)=0$, για κάθε $x\in R$

Αν είναι και $f(0)=1$, $f'(0)=3$, αφού διαπιστώσετε ότι $f'(x)+3f(x)=4e^{-x}$

μετά να αποδείξετε ότι $f(x)=-2e^{-3x}+3e^{-x}$, $x\in R$

α.18● Έστω ότι $2f(x)=x+xf'(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f'''(0)=0$

α) Να αποδείξετε ότι $xf'''(x)=0$ για κάθε $x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι **σταθερή**.

γ) Αν ξέρουμε ότι $f'(1)=5$, να αποδείξετε ότι $f(x)=2x^2+x$, για κάθε $x\in R$

α.19● Έστω παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $0\le 2f'(x)\le f(1)-f(2)$ για κάθε $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** αριθμός ξ, ώστε $f'(\xi)=0$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι **σταθερή**.

α.20● Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $f'(x)-1=f(-x)-f(x)$ για κάθε $x\in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)+f'(-x)=2$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)-f(-x)=2x$, $x\in R$

γ) Αν $f(0)=0$, να αποδείξετε ότι $f(x)=-x^2+x$, $x\in R$

α.21● Έστω η ορισμένη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f, ώστε $xf'(x)-f(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$

Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$

α.22● Έστω η **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f(x+h) \le f(x)\cdot f(h)}$ για κάθε $\mathbf{x,h \in R}$ και $\mathbf{f(0) = f'(0) = 1}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \le f(x)\dfrac{f(h)-1}{h}}$, για κάθε $\mathbf{h > 0}$

και $\mathbf{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge f(x)\dfrac{f(h)-1}{h}}$, για κάθε $\mathbf{h < 0}$

β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = e^x}$, $\mathbf{x \in R}$

α.23● Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$

ώστε $\mathbf{f'(x)g(x) = 1}$, $\mathbf{f(x)g'(x) = -1}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$ και $\mathbf{f(0) = 1}$, $\mathbf{g(0) = 1}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)g(x) = 1}$

β) Μετά να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = e^x}$ και $\mathbf{g(x) = e^{-x}}$

α.24● Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f}$ και $\mathbf{g}$

Ξέρουμε ότι $\mathbf{f'(x) + g(x) = f(x) + g'(x)}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Αν οι γραφικές παραστάσεις $\mathbf{C_f}$, $\mathbf{C_g}$ έχουν **ένα τουλάχιστον κοινό σημείο** να αποδείξετε ότι αυτές θα **ταυτίζονται**.

α.25● Έστω οι παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ συναρτήσει $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, ώστε $\mathbf{f(1) = 1}$, $\mathbf{g(1) = 0}$

Ξέρουμε ότι $\mathbf{f'(x)(g(x)-1) = g'(x)(1-f(x))}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{(f(2012)-1)(g(2012)-1) = 0}$

α.26● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{(x^2+1)f'(x) = (x-1)^2 f(x)}$ για κάθε $\mathbf{x \in R}$

Αν $\mathbf{f(0) = 1}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}}$

α.27● Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = x\eta\mu x + \alpha\sigma\upsilon\nu x}$, ώστε $\mathbf{g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\alpha = 1}$

β) Να **βρείτε** τη συνάρτηση $\mathbf{f}$, αν $\mathbf{f'(x) = x\,\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu x + 1}$, $\mathbf{x \in R}$ και $\mathbf{f(0) = 1}$

α.28● Έστω η συνάρτηση f ώστε $f''(x) - f(x) = 0$, για κάθε $x \in R$

Αν είναι και $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x - e^{-x}$

α.29● Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $f''(x) + f(x) = 0$, $x \in R$

Αν $f(0) = f'(0) = 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 0$

α.30● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x) = (x-1)f'(x) + 1$, $x \in R$

Αν η f'' είναι **συνεχής** και $f(2) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(x) = 1$

α.31● Έστω η ορισμένη στο $R_+^* = (0,+\infty)$ συνάρτηση φ, με τύπο $\varphi(x) = x\ln x$

Να αποδείξετε ότι $\varphi'(1) = 1$

Έστω και η ορισμένη στο $R_+^* = (0,+\infty)$ συνάρτηση f, ώστε $xf'(x) + f(x) = 1 + \ln x$

για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 0$

Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) = xf(x)$, $x > 0$

α.32● Έστω η ορισμένη στο R_+^* συνάρτηση f, ώστε $x^2 f'(x) = xe^x - e^x$, $x > 0$

και $f(1) = e$

α) Να αποδείξετε ότι $2f'(x) + xf''(x) = e^x$, $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) + xf'(x) = e^x$, $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x > 0$

α.33● Έστω η ορισμένη στο R_+^* συνάρτηση f, ώστε $f(1) = 1$

α) Αν $\dfrac{f(x)}{f'(x)} = x$, να αποδείξετε ότι $f(x) = x$, $x > 0$

α) Αν $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^{x^2-1}}$, $x > 0$

α.34● Έστω η ορισμένη στο R_+^* συνάρτηση f, ώστε $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2e^x}{1-e^{2x}}$, $x > 0$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c \in R$ ώστε $f(x) = c\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $x > 0$

Εργασία

1☐ Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f'(x)f^2(x)+f'(x)=0}$, $\mathbf{x\in R}$ τότε η $\mathbf{f}$ είναι **σταθερή**.

2☐ Αν $\mathbf{f'(x)=g'(x)}$ και $\mathbf{f(0)=g(0)}$, τότε θα είναι $\mathbf{f(x)=g(x)}$

3● Αν $\mathbf{f'(x)=e^x ημx+e^x συνx}$, με $\mathbf{f(0)=0}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=ημx\ e^x}$

4● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f'(x)=3x^2}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$
Αν $\mathbf{f(1)=1}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(-1)=-1}$

5● Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f'(x)=1}$, $\mathbf{x\in R^*}$, $\mathbf{f(0)=0}$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=x}$

6● Να βρείτε τη συνάρτηση $\mathbf{f:R\to R}$, με $\mathbf{f'(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{αν}\quad x\ge 0\\ 4x^3 & \text{αν}\quad x<0\end{cases}}$ και $\mathbf{f(1)=1}$

7● Αν $\mathbf{f'(x)=e^x}$ για κάθε $\mathbf{x\ge 0}$ και $\mathbf{f'(x)=-e^x}$, για κάθε $\mathbf{x<0}$
να **βρείτε** τον αριθμό $\mathbf{f(-1)-f(1)}$

8● Αν $\mathbf{\left|\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right|\le|x-x_o|}$, για κάθε $\mathbf{x\ne x_o}$, να δείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **σταθερή**.

9● Αν $\mathbf{f'''(x)=g'''(x)}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$, $\mathbf{f(0)=g(0)}$, $\mathbf{f'(0)=g'(0)}$, $\mathbf{f''(0)=g''(0)}$

να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=g(x)}$

10● Έστω ότι $\mathbf{f'(x)+συνx f(x)=0}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ …με $\mathbf{f(0)=1}$

α) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** πραγματικός $\mathbf{c}$, ώστε $\mathbf{e^{ημx}f(x)=c}$

β) Να βρείτε την $\mathbf{f}$

11● Αν για την ορισμένη και **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

είναι $\mathbf{f(x)+f'(x)=e^{-x}}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$ και $\mathbf{f(0)=0}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=\dfrac{x}{e^x}}$

12● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R_+^*}$ συνάρτηση $\mathbf{g}$ και η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

Ξέρουμε ότι $\mathbf{f(g(x))=x}$ και $\mathbf{f'(g(x))=x}$, για κάθε $\mathbf{x>0}$ και $\mathbf{g(1)=0}$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{g(x)=\ln x}$ και $\mathbf{f(x)=e^x}$

13● Ξέρουμε ότι $f'(x)-f(x)=e^{x^2}-2xe^{x^2}$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=-1$

α) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** $c\in R$, ώστε $f(x)+e^{x^2}=ce^x$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=-e^{x^2}$, $x\in R$

14● Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο διάστημα $D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

και $f(0)=2012$, $f'(x)συνx+f(x)ημx=f(x)συνx$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

να αποδείξετε ότι $f(x)=2012e^xσυνx$, με $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

15● Έστω ότι $f(x)f'\left(\frac{1}{x}\right)=x$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=1$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=0$, $x>0$

β) Μετά να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$, $x>0$

16● Έστω η συνάρτηση f, με $f'(x)+f(x)συνx=f(x)$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

α) Να διαπιστώσετε ότι $\left(f(x)e^{ημx}\right)'=f(x)e^{ημx}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x-ημx}$, για κάθε $x\in R$

17● Έστω η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x)\neq 0$ και $f'(x)\neq 0$

για την οποία ισχύει $\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f'(x)}=\frac{2}{e^x}$ και $f(0)=1$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x$

18● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f'(x)=αf(x)+α-α^2x$, $α\in R^*$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f **δεν μπορεί** να είναι **σταθερή**.

19● Έστω ότι $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y>0$ και $f'(1)=1$

Να αποδείξετε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο R και μετά να **βρείτε** την f

20● Έστω οι **παραγωγίσιμες** συναρτήσεις f και g

ώστε $f'(x)-f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$

και $g(x)=-x(g'(x)-2)$, για κάθε $x>0$ και $g(1)=0$

α) Να **προσδιορίσετε** τις f,g

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)-xg'(x)=e^{x}-x$, για κάθε $x>0$

21● Έστω η ορισμένη στο $[1,+\infty)$ συνάρτηση f

ώστε $f(x)\neq 0$, $f(1)=2$ και $\frac{f'(x)}{x+1}=\frac{1}{xf(x)}$, για κάθε $x\geq 1$

α) Να αποδείξετε ότι $f^{2}(x)=2x+2\ln x+2$, για κάθε $x\geq 1$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{2+2\ln x+2}$, για κάθε $x\geq 1$

22● Έστω η ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, ώστε $f(0)=0$

και $2f'(x)+xf''(x)=2$, για κάθε $x\in R$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in R$

23● Για τη συνάρτηση $f/(1,+\infty)$ είναι $f(x)=\ln(x^{x})f'(x)$, για κάθε $x>1$, $f'(e)=\frac{1}{e}$

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(2011)}{\ln(2011)}=\frac{f(2012)}{\ln(2012)}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x>1$

24● Έστω ότι $f(x)-2f'(x)+f''(x)=e^{x}$, για κάθε $x\in R$ και $f(0)=1$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x)=f'(x)-f(x)$, με $g(0)=1$ και $h(x)=\frac{g(x)}{e^{x}}-x$

Να αποδείξετε ότι α) $h(x)=1$ β) $g(x)=(x+1)e^{x}$ γ) $f(x)=\frac{1}{2}e^{x}x^{2}+xe^{x}+e^{x}$

25● Έστω οι ορισμένες και **παραγωγίσιμες** στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$

Είναι $\mathbf{f'(x)g(x)+e^{x}+f(x)g'(x)=0}$, $\mathbf{f'(x)+g'(x)=e^{x}}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$

Επίσης είναι $\mathbf{g'(0)=0}$ και $\mathbf{f(0)=1}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)>0}$, $\mathbf{g(x)<0}$

β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=e^{x}}$, $\mathbf{g(x)=-1}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$

26● Έστω οι ορισμένες και **παραγωγίσιμες** στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$

Είναι $\mathbf{f(0)=0}$ και $\mathbf{f(x)=g(x)+x}$, $\mathbf{f'(x)=g(x)-x+2}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$

Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(\alpha)-2g(\alpha)=f(\beta)-2g(\beta)}$, για κάθε $\mathbf{\alpha,\beta\in R}$

27● Έστω η ορισμένη και $\mathbf{2}$ φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(0,+\infty)}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

Ξέρουμε ότι $\mathbf{f''(x)=\dfrac{1}{x}}$, για κάθε $\mathbf{x>0}$ και ότι $\mathbf{f(1)=0}$, $\mathbf{f(2)=2\ln 2}$

α) Να διαπιστώσετε πρώτα ότι $\mathbf{(x\ln x)'=1+\ln x}$, για κάθε $\mathbf{x>0}$

β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(x)=x\ln x}$, για κάθε $\mathbf{x>0}$

28● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f'(-x)+f'(x)=1}$, $\mathbf{x\in R}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f(-x)=f(x)-x}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$

β) Αν $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x-1)=0}$, να αποδείξετε ότι $\mathbf{\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x-1)=0}$

29● Έστω η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f(x+h)=f(h)f(x)e^{hx}}$

και $\mathbf{f(x)\neq 0}$, για κάθε $\mathbf{x,h\in R}$ και $\mathbf{f'(0)=1}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(x)\left(e^{hx}(f(h)-1)+e^{hx}-1\right)}{h}}$, με $\mathbf{h\neq 0}$

β) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{f'(x)=f(x)\cdot(x+1)}$, για κάθε $\mathbf{x\in R}$

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{\frac{x^2+2x}{2}}}}$ είναι **σταθερή**.

δ) Να βρείτε τον **τύπο** της συνάρτησης $\mathbf{f}$

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ξ Γενικά θέματα

Ας δούμε τα πιο κάτω θέματα.

Θέμα 1

Θεωρούμε τη **συνεχή** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, τον $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{Z}^*$ και τον $\boldsymbol{\theta} \in \left(\mathbf{0}, \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$

Γνωρίζουμε ότι $\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = 7x - 2\sigma\upsilon\nu\theta - 6$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

α) Θα βρούμε τον **τύπο** της $\mathbf{f}$

β) μετά θα βρούμε την **τιμή** του $\boldsymbol{\lambda}$

γ) και τέλος θα βρούμε την **τιμή** του $\boldsymbol{\theta}$

Απάντηση

α) Από $\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = 7x - 2\sigma\upsilon\nu\theta - 6$

παραγωγίζοντας παίρνουμε $f(x) = 7$, $x \in \mathbf{R}$

β) Έτσι από $\int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = 7x - 2\sigma\upsilon\nu\theta - 6$

είναι $\int_{\lambda}^{x} 7\,dt = 7x - 2\sigma\upsilon\nu\theta - 6$, $x \in \mathbf{R}$

Ισοδύναμα $7(x - \lambda) = 7x - 2\sigma\upsilon\nu\theta - 6$

ή $-7\lambda = -2\sigma\upsilon\nu\theta - 6$

ή $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{7\lambda - 6}{2}$

Από $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, είναι $0 < \sigma\upsilon\nu\theta < 1$

Οπότε $0 < \dfrac{7\lambda - 6}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < 7\lambda - 6 < 2 \Leftrightarrow \dfrac{6}{7} < \lambda < \dfrac{8}{7} \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 1}$

...αφού ο λ είναι ακέραιος.

γ) Οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{2}$ και συνεπώς $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

Θέμα 2

Αν για τη **συνεχή** συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι $\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx = 3}$, θα δείξουμε ότι $\int_0^1 \mathbf{f^2(x)dx \geq 5}$

Απάντηση

Επειδή $(\mathbf{f(x)-1})^2 \geq \mathbf{0}$, είναι $\int_0^1 (\mathbf{f(x)-1})^2 \geq \mathbf{0}$ ή $\int_0^1 \left(\mathbf{f^2(x) - 2f(x) + 1}\right)\mathbf{dx \geq 0}$

ή $\int_0^1 \mathbf{f^2(x)\,dx} - 2\int_0^1 \mathbf{f(x)\,dx} + \int_0^1 \mathbf{1\,dx \geq 0}$

ή $\int_0^1 \mathbf{f^2(x)\,dx - 2\cdot 3 + 1 \geq 0}$

ή $\int_0^1 \mathbf{f^2(x)\,dx \geq 5}$

Θέμα 3

Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f}$, η οποία είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

Θεωρούμε και τη συνάρτηση $\mathbf{I(x)} = \int_0^1 \mathbf{f(t-x)\,dt}$

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{I}$ είναι **παραγωγίσιμη**.

β) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{I}$ είναι **γνήσια φθίνουσα**.

Απάντηση

α) θέτουμε $\mathbf{y = t - x} \Leftrightarrow \mathbf{t = y + x}$

Οπότε $\mathbf{I(x)} = \int_{-x}^{1-x} f(y)\ d(y+x) = \int_{-x}^{1-x} f(y)(y+x)'\,d(y) = \int_0^{1-x} \mathbf{f(y)\,dy} - \int_0^{-x} \mathbf{f(y)\,dy}$

Έστω και η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{\Phi(x)} = \int_0^x \mathbf{f(y)\,dy}$

Έτσι η $\mathbf{I(x) = \Phi(1-x) - \Phi(-x)}$ είναι παραγωγίσιμη, σαν πράξεις παραγωγισίμων.

β) $\mathbf{I'(x)} = \left(\Phi(1-x) + \Phi(-x)\right)' = \left(\int_0^{1-x} f(y)\,dy - \int_0^{-x} f(y)\,dy\right)' = \mathbf{-f(1-x) + f(-x)}$

Από $\mathbf{-x < 1 - x}$, είναι $\mathbf{f(-x) < f(1-x)}$ ή $\mathbf{-f(1-x) + f(-x) < 0}$

Δηλαδή $\mathbf{I'(x) < 0}$ και έτσι διαπιστώνουμε ότι η $\mathbf{I}$ είναι **γνήσια φθίνουσα**.

Θέμα 4

Έστω τα ολοκληρώματα $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)dx$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)dx$

α) Θα αποδείξουμε ότι $I=J$ και μετά β) θα **υπολογίσουμε** τα I και J

Απάντηση

α) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sigma\upsilon\nu^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\eta\mu^3 y}{\eta\mu^3 y+\sigma\upsilon\nu^3 y}\right)dy$

θέτουμε $y=\frac{\pi}{2}-x$ ή $x=\frac{\pi}{2}-y$

$$=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\eta\mu^3 y}{\eta\mu^3 y+\sigma\upsilon\nu^3 y}\right)dy=\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)dy=J$$

β) Επίσης $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x+\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\frac{\pi}{2}$

Έτσι θα είναι $I+I=\frac{\pi}{2}$ ή $I=\frac{\pi}{4}$ και προφανώς $J=\frac{\pi}{4}$

Θέμα 5

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, ώστε $\int_0^x f(t)dt\geq xe^{-x}$, για κάθε $x\in R$

και $f'(0)=1$

Θα βρούμε την εξίσωση της **εφαπτομένης** της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt-xe^{-x}$, με $g'(x)=f(x)-e^{-x}+xe^{-x}$

Είναι $g(x)\geq 0$ ή $g(x)\geq g(0)$, για κάθε $x\in R$

Οπότε, η g παρουσιάζει στο 0 **ακρότατο**.

Από το θεώρημα του **Fermat**, είναι $g'(0)=0 \Leftrightarrow f(0)-1=0 \Leftrightarrow f(0)=1$

Επειδή $f'(0)=1$, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$

είναι η $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-1=1(x-0) \Leftrightarrow y=x+1$

Θέμα 6

Αν η συνάρτηση **f** είναι **συνεχής** στο **R**

δείξτε ότι $\int_d^a f(x)\,dx \int_b^c f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \int_c^a f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx = 0$

Απάντηση

Είναι $\int_d^a f(x)\,dx \int_b^c f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \int_c^a f(x)\,dx + \int_d^c f(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx$

$$= \int_d^a f(x)\,dx \left(\int_b^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx\right)$$

$$+ \int_c^a f(x)\,dx \left(\int_d^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx\right)$$

$$+ \int_a^b f(x)\,dx \left(\int_d^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx\right)$$

$$= \int_d^a f(x)\,dx \int_b^a f(x)\,dx + \int_d^a f(x)\,dx \int_a^c f(x)\,dx$$

$$+ \int_c^a f(x)\,dx \int_d^a f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx$$

$$+ \int_a^b f(x)\,dx \int_d^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \int_a^c f(x)\,dx$$

$$= \int_d^a f(x)\,dx \left(\int_d^a f(x)\,dx + \int_a^d f(x)\,dx\right)$$

$$+ \int_d^a f(x)\,dx \left(\int_c^a f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx\right)$$

$$+ \int_a^b f(x)\,dx \left(\int_d^a f(x)\,dx + \int_a^d f(x)\,dx\right) = 0$$

Θέμα **7**

Έστω η **συνεχής** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\mathbf{f(x) = 1 + \int_0^1 f(t)\,dt \cdot \int_0^x f(v)dv}$

και $\mathbf{f(x) > 0}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

α) Θα αποδείξουμε ότι α$_1$) $\mathbf{f(0) = 1}$

α$_2$) $\mathbf{\int_0^1 f(t)\,dt > 0}$

α$_3$) η $\mathbf{f}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}$

α$_4$) η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

α$_5$) η $\mathbf{f}$ στρέφει τα **κοίλα πάνω** στο $\mathbf{R}$

β) Θα αποδείξουμε ότι η $\mathbf{F(x) = f(x)e^{-x\int_0^1 f(t)dt}}$ είναι **σταθερή**, με $\mathbf{F(x) = 1}$

Απάντηση

α$_1$) Η σχέση $\mathbf{f(x) = 1 + \int_0^1 f(t)\,dt \int_0^x f(v)\,dv}$, για $\mathbf{x = 0}$ δίνει $\mathbf{f(0) = 1}$

α$_2$) Επειδή $\mathbf{f(x) > 0}$ και η συνεχής $\mathbf{f}$ αφού δεν είναι μηδενική, είναι $\mathbf{\int_0^1 f(t)dt > 0}$

α$_3$) Προφανώς, η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$

αφού η $\mathbf{y = \int_0^x f(v)\,dv}$ είναι παραγωγίσιμη και το $\mathbf{\int_0^1 f(t)\,dt}$ είναι αριθμός.

α$_4$) Είναι $\mathbf{f'(x) = \left(1 + \int_0^1 f(t)\,dt \cdot \int_0^x f(v)dv\right)' = f(x)\int_0^1 f(t)\,dt > 0}$

...αφού $f(x) > 0$ και $\int_0^1 f(t)\,dt > 0$

Οπότε, η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

α$_5$) Είναι $\mathbf{f''(x) = f'(x)\int_0^1 f(t)\,dt > 0}$ και συνεπώς η $\mathbf{f}$ στρέφει τα **κοίλα πάνω.**

β) $\mathbf{F'(x) = \left(f(x) \cdot e^{-x\int_0^1 f(t)\,dt}\right)'}$

$$= f'(x) \cdot e^{-x\int_0^1 f(t)dt} - f(x)e^{-x\int_0^1 f(t)dt}\int_0^1 f(t)dt = e^{-x\int_0^1 f(t)\,dt}\left(f'(x) - \cancel{f(x)\int_0^1 f(t)\,dt}\right) = \mathbf{0}$$

Οπότε, η συνάρτηση $\mathbf{F}$ είναι **σταθερή**, με $\mathbf{F(x) = F(0) = f(0)e^0 = 1 \cdot 1 = 1}$

Θέμα 8

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $\boldsymbol{\alpha,\beta}$, με $\mathbf{0<\alpha<\beta}$

την ορισμένη και **συνεχή** στο $(\mathbf{0,+\infty})$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\mathbf{f(t)\,dt=0}$

και τη συνάρτηση $\mathbf{g(x)=2+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt}$ με $\mathbf{x\in(0,+\infty)}$

α) Θα αποδείξουμε ότι **υπάρχει** ένα τουλάχιστον $\mathbf{x_o\in(\alpha,\beta)}$

ώστε η **εφαπτομένη** της $\mathbf{C_g}$ στο $\mathbf{M_o(x_o,g(x_o))}$ να είναι **παράλληλη** στον $\mathbf{x'x}$

β) Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{g(x_o)=2+f(x_o)}$

Απάντηση

α) Η συνάρτηση g είναι προφανώς συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β)

και $\mathbf{g(\alpha)=g(\beta)}$ $\Leftrightarrow$ $2+\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha}f(t)\,dt=2+\dfrac{1}{\beta}\int_{\alpha}^{\beta}f(t)\,dt$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0=0}$

Με βάση το θεώρημα **Rolle**, για τη συνάρτηση $\mathbf{g}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

θα υπάρχει ένας τουλάχιστον $\mathbf{x_o}\in(\alpha,\beta)$, ώστε $\mathbf{g'(x_o)=0}$

Οπότε, διαπιστώνουμε ότι η **εφαπτομένη** της C_g στο σημείο της $\mathbf{M_o(x_o,g(x_o))}$

θα είναι **παράλληλη** στον άξονα $\mathbf{x'x}$

β) Είναι $\mathbf{g'(x)}=\left(2+\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt\right)'=(2)'+\left(\dfrac{1}{x}\right)'\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt+\left(\int_{\alpha}^{x}f(t)\,dt\right)'\dfrac{1}{x}$

$$=-\frac{1}{\mathbf{x^2}}\int_{\alpha}^{\mathbf{x}}\mathbf{f(t)\,dt}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\mathbf{f(x)}$$

Από $\mathbf{g'(x_o)=0}$, είναι $-\dfrac{1}{x_o^{\,2}}\displaystyle\int_{\alpha}^{x_o}f(t)\,dt+\dfrac{1}{x_o}f(x_o)=0$ ή $\dfrac{1}{x_o^{\,2}}\displaystyle\int_{\alpha}^{x_o}f(t)\,dt=\dfrac{1}{x_o}f(x_o)$

ή $\displaystyle\int_{\alpha}^{\mathbf{x_o}}\mathbf{f(t)\,dt=x_of(x_o)}$

Οπότε $\mathbf{g(x_o)=2+f(x_o)}$ $\Leftrightarrow$ $2+\dfrac{1}{x_o}\displaystyle\int_{\alpha}^{x_o}f(t)\,dt=2+f(x_o)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_{\alpha}^{\mathbf{x_o}}\mathbf{f(t)\,dt=x_of(x_o)}$

Προφανές.

Θέμα 9

Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής και **περιττή** στο $\mathbf{R}$, θα δείξουμε ότι $\int_{-x}^{x} \mathbf{f(t)\,dt = 0}$ ... $\mathbf{x \in R}$

Μετά, θα αποδείξουμε ότι $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\eta\mu^{11}x\right)dx = 0$

Απάντηση

$$\text{Είναι } \int_{-x}^{x} f(t)\,dt = \int_{-x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt$$

$$= -\int_{-x}^{0} f(-t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{...Αφού } f(-t) = -f(t)$$

$$= \int_{-x}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int_{0}^{x} f(t)\,dt \quad \text{...Θέτουμε } -t = y \Leftrightarrow t = -y$$

$$= \int_{x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x}^{x} f(t)\,dt = 0$$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής:

Είναι $F(x) = \int_{-x}^{x} f(x)\,dt = \int_{-x}^{0} f(x)\,dt + \int_{0}^{x} f(x)\,dt = -\int_{0}^{-x} f(x)\,dt + \int_{0}^{x} f(x)\,dt$

Η συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{0}^{x} f(x)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη, σαν παράγουσα της $\mathbf{f}$

Η συνάρτηση $F(x) = -\varphi(-x) + \varphi(x)$ είναι κι' αυτή προφανώς παραγωγίσιμη.

Οπότε $F'(x) = \left(-\int_{0}^{-x} f(x)\,dt + \int_{0}^{x} f(x)\,dt\right)' = f(-x) + f(x) = 0$ (...αφού $\mathbf{f}$: περιττή)

Δηλαδή η $\mathbf{F}$ είναι **σταθερή**, με $F(x) \equiv F(0) = \int_{0}^{0} f(t)dt = 0$ και τελικά $\int_{-x}^{x} f(x)\,dt = 0$

Να παρατηρήσουμε, ότι θα μπορούσαμε να κινηθούμε και με τη βοήθεια των παραγουσών, με βάση το γεγονός ότι στην περίπτωση που μία συνάρτηση είναι περιττή, κάθε παράγουσά της είναι άρτια.

Οπότε τώρα $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\eta\mu^{11}x\right)dx = 0$ ...αφού η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^{11}x$ είναι **περιττή**.

Θέμα **10**

Έστω η παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f

για την οποία ισχύουν $f(x)>0$, $f'(x)+2xf(x)=0$ για κάθε $x>0$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$

α) Θα αποδείξουμε ότι η παράγωγος της f, είναι **συνεχής** στο διάστημα $(0,+\infty)$ και μετά θα **βρούμε** τη συνάρτηση f

β) Θα αποδείξουμε ότι $\dfrac{x-1}{2x^2}f(x)<\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{x-1}{2}$ για κάθε $x>1$

γ) Θα **βρούμε** τη συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)\,dt$ με $x>1$

δ) Θα **αποδείξουμε** ότι $2e\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}dt<1$, για κάθε $x>1$

Απάντηση

α) Για κάθε $x>0$, είναι $f'(x)+2xf(x)=0$ ή $f'(x)=-2xf(x)$

Η συνάρτηση $y=-2x$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

και η f σαν παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $(0,+\infty)$

Συνεπώς η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, σαν γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Από $f'(x)+2xf(x)=0$ …*επειδή* $f(x)>0$

είναι $f'(x)=-2xf(x) \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=-2x \Leftrightarrow (\ell n(f(x)))'=(-x^2)' \Leftrightarrow \ell n(f(x))=-x^2+c$

Για $x=1$ είναι $\ell n(f(1))=-1+c$ ή $c=1$

Οπότε $\ell n(f(x))=-x^2+1=\ell n(e^{1-x^2})$ και τελικά $f(x)=e^{1-x^2}$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής:

Από $f'(x)+2xf(x)=0$ είναι και $e^{x^2}\cdot f'(x)+2e^{x^2}\cdot xf(x)=e^{x^2}\cdot 0$ ή $\left(e^{x^2}f(x)\right)'=0$

Οπότε $e^{x^2}f(x)=c$

Επειδή για $x=1$ είναι $e^1\cdot f(1)=c$ ή $c=e$, θα είναι $e^{x^2}\cdot f(x)=e$ ή $f(x)=e^{1-x^2}$

β) Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g(t)=\dfrac{f(t)}{2t^2}}$, $t>0$

Είναι $\mathbf{g'(t)=\dfrac{f'(t)2t^2-f(t)(2t^2)'}{(2t^2)^2}}$

$$=\frac{-2tf(t)2t^2-f(t)4t}{4t^4}$$

$$=-f(t)\frac{t^2+1}{t^3}=-\mathbf{e^{1-t^2}\frac{t^2+1}{t^3}}<0 \quad \text{για κάθε } t>0$$

Οπότε, η συνάρτηση g είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbf{(0,+\infty)}$

Από $\mathbf{1\le t\le x}$, είναι $g(1)\ge g(t)\ge g(x)$,οπότε $g(1)-g(t)\ge 0$ και $\mathbf{g(t)-g(x)\le 0}$

Επειδή όμως οι συναρτήσεις $r(t)=g(1)-g(t)$ και $s(t)=g(t)-g(x)$

δεν είναι παντού μηδέν και είναι συνεχείς στο $[1,x]$

θα είναι $\int_1^x \big(g(1)-g(t)\big)dt>0$ και $\int_1^x \big(g(t)-g(x)\big)dt>0$

Από τη σχέση $\int_1^x \big(g(1)-g(t)\big)dt>0$

είναι $\int_1^x g(1)\,dt>\int_1^x g(t)\,dt$ ή $\int_1^x \frac{1}{2}dt>\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt$ ή $\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{1}{2}(x-1)$

Από τη σχέση $\int_1^x \big(g(t)-g(x)\big)dt>0$

είναι $\int_1^x g(t)\,dt>\int_1^x g(x)\,dt$ ή $\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt>g(x)\int_1^x 1\,dt$ ή $\int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt>\frac{x-1}{2x^2}f(x)$

Συνεπώς, $\mathbf{\dfrac{x-1}{2x^2}f(x)<\int_1^x \dfrac{f(t)}{2t^2}dt<\dfrac{x-1}{2}}$ για κάθε $\mathbf{x>1}$

Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε την πιο πάνω σχέση

αν θεωρούσαμε τη συνάρτηση $g(u)=\int_1^u \frac{f(t)}{2t^2}\,dt$ με $u\in[1,x]$ και $x>1$

να εφαρμόζαμε το θεώρημα **μέσης τιμής** και επειδή $g''(u)=-\dfrac{f(u)(u^2+1)}{u^3}<0$

για κάθε $u>0$, η g' είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ και έτσι προκύπτει η σχέση.

γ) Για κάθε $x > 1$

είναι $\mathbf{F(x)} = \int_1^x \left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)\,dt = \int_1^x \left(f(t)+\frac{1}{2t^2}f(t)\right)dt = \int_1^x e^{1-t^2} + \frac{1}{2t^2}e^{1-t^2}\,dt$

$$= \int_1^x \left(-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right)'dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{2x}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}e^0 = -\frac{1}{2x}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}$$

δ) Η σχέση $2e\int_1^x e^{-t^2}\,dt < 1$ γίνεται $2\int_1^x e\cdot e^{-t^2}\,dt < 1 \Leftrightarrow 2\int_1^x e^{1-t^2}\,dt < 1$

$$\Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt < \frac{1}{2}$$

Από $e^{1-x^2} > 0$, είναι $e^{1-x^2} - 1 > -1$ ή $f(x) - f(1) > -1$

ή $\int_1^x f'(t)\,dt > -1$

ή $\int_1^x -2tf(t)\,dt > -1$

ή $\int_1^x tf(t)\,dt < \frac{1}{2}$

Για κάθε $t \geq 1$ είναι και $tf(t) \geq f(t)$ ή $tf(t) - f(t) \geq 0$ …*αφού* $f(t) > 0$

και επειδή η συνάρτηση $y(t) = tf(t) - f(t)$ είναι συνεχής στο $[1, x]$ και όχι μηδενική

θα ισχύει $\int_1^x (tf(t) - f(t))\,dt > 0$

ή $\int_1^x tf(t) - f(t)\,dt > 0$

ή $\int_1^x tf(t)\,dt > \int_1^x f(t)\,dt$

ή $\int_1^x f(t)\,dt < \int_1^x tf(t)\,dt$

Οπότε

από τις σχέσεις $\int_1^x f(t)\,dt < \int_1^x tf(t)\,dt$ και $\int_1^x tf(t)\,dt < \frac{1}{2}$, θα είναι $\int_1^x f(t)\,dt < \frac{1}{2}$

Ασκήσεις

ξ.1● Για τη συνεχή συνάρτηση $\mathbf{f}$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha+2}^{\beta+2} f(x-2)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

και $\int_{2\alpha}^{2\beta} f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$

ξ.2● Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^{\nu}(1-x)^{\mu}dx = \int_0^1 x^{\mu}(1-x)^{\nu}dx$, μ, ν φυσικοί.

ξ.3● Για τη συνεχή $\mathbf{f}$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)\int_0^1 f\big(\alpha+(\beta-\alpha)x\big)dx$

ξ.4● Να αποδείξετε ότι $2\int_{\alpha}^{\beta} f(x)f'(x)dx = \big(f(\beta)\big)^2 - \big(f(\alpha)\big)^2$

όπου η συνάρτηση $\mathbf{f'}$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $\Delta = [\alpha.\beta]$

ξ.5● Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $\mathbf{f}$ και $\lambda \in \mathbf{R}$

Αν για κάθε τιμή του $\mathbf{x}$, είναι $\int_{\lambda}^{x} f(t)dt = 3x-2$, να **βρείτε** την $\mathbf{f}$ και τον λ

ξ.6● Αν η $\mathbf{f}$ είναι συνεχής, ώστε $\int_1^{x^2} f(z)dz \le \int_1^{x} \big(x+zf(z)\big)dz$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

να αποδείξετε ότι $f(1)=1$

ξ.7● Έστω οι $\mathbf{2}$ φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$

Αν $f(2)=g(2)$, $f(1)=g(1)+1$ και $f''(x)=g''(x)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=f(x)+x-2$, για κάθε τιμή του $\mathbf{x}$

β) Να υπολογίσετε την **τιμή** του ολοκληρώματος $I = \int_1^3 |f(x)-g(x)|\,dx$

ξ.8● Θεωρούμε τη συνεχή στο $[0,+\infty)$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

α) Να αποδείξετε ότι η $F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(z)dz & \text{αν} \quad x>0 \\ f(0) & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$ είναι **συνεχής** στο $\mathbf{0}$

β) Αν η $\mathbf{f}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{0}$, δείξτε ότι η $\mathbf{F}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{R}_+$

ξ.9● Για τη **συνεχή** και **άρτια** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, δείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt = 2\int_{0}^{\alpha} f(t)dt$ για κάθε $\alpha > 0$

ξ.10● Αν είναι $\int_{-x}^{x} f(z)\,dz = 0$ για κάθε $x \in R$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **περιττή**.

ξ.11● Να **βρείτε** δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\mathbf{f}$, ώστε $\int_{0}^{x} f(z)\,dz = (f(x))^2$

ξ.12● Έστω η **συνεχής** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\int_{0}^{2} f(x)dx = f(x) + e^{x} + 2001 - e^{2}$

Αφού αποδείξετε ότι η $\mathbf{f}$ είναι **παραγωγίσιμη**, μετά να **βρείτε** την $\mathbf{f}$

ξ.13● Έστω ότι $\int_{0}^{1} x(f'(x) - g'(x))\,dx = 2$ και $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} g(x)\,dx$

να αποδείξετε ότι $f(1) - g(1) = 2$

ξ.14● Έστω η συνεχής συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $f(x) > 0$, για κάθε $x \in [-1,1]$

και τα ολοκληρώματα $I = \int_{-1}^{1} \left(\dfrac{f(x+1)}{f(x+1) + f(1-x)}\right) dx$, $J = \int_{-1}^{1} \left(\dfrac{f(1-x)}{f(x+1) + f(1-x)}\right) dx$

Να αποδείξετε ότι $I = J$ και μετά να **υπολογίσετε** τα $\mathbf{I}$ και $\mathbf{J}$

ξ.15● Έστω η **συνεχής** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $f(x) + f(4 - x) = 4$, $x \in R$

Υπολογίστε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{1}^{3} f(x)\,dx$

ξ.16● Να βρείτε την **τιμή** του θετικού ακεραίου κ, ώστε $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sigma\upsilon\nu^{\kappa} x\, \eta\mu^{3} x)\,dx = \dfrac{1}{60}$

ξ.17● Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f}$ ορισμένη και παραγωγίσιμη στο R_{+}, ώστε $f'(x) > 0$

Αν $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$, να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$, είναι $F(x) \leq xf(x)$

ξ.18● Αν η $\mathbf{f}$ είναι **συνεχής**, δείξτε ότι η $h(x) = \int_{0}^{1} (uf(ux))\,du$ είναι **συνεχής** στο $\mathbf{0}$

ξ.19● Έστω η **συνεχής** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, ώστε $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in R$

Δείξτε ότι η $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_{0}^{x^2 - 5x} f(t)\,dt$ έχει στο $(-3,0)$ **μία μόνο ρίζα.**

ξ.**20**● Αν $f(x)=\int_2^x (9t^2-2\alpha t-5)dt$ έχει **τοπικό ακρότατο** στο $x_o=1$ να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και ότι η f στο 1 έχει **τοπικό ελάχιστο** ίσο με $f(1)=-10$

ξ.**21**● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x)=\int_0^x e^{t-f(t)}dt$, $x\in R$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$

ξ.**22**● Έστω η ορισμένη στο R_+^* συνάρτηση f, ώστε $f(x)=x+\int_1^x\left(\frac{f(t)}{t}\right)dt$, $x>0$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\ln x+x$

ξ.**23**● Αν για τη συνεχή συνάρτηση f είναι $\int_1^x f(t)\,dt\ge x^2-1$, $x\in R$

να αποδείξετε ότι $f(1)=2$

ξ.**24**● Έστω οι ορισμένες στο R_+ συναρτήσεις f, g

Είναι $1+\int_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{g(x)}$ και $\frac{1}{2}+\int_0^x g(t)\,dt=\frac{1}{f(x)}$, με $f(x)g(x)\ne 0$ και $x\ge 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x)g(x)=f(x)g'(x)$, $x\ge 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2g(x)$, $x\ge 0$

ξ.**25**● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f, ώστε $f'(x)-f(x)=\int_0^1 f(t)\,dt$, $x\in R$ και $f(0)=1$

α) Να αποδείξετε ότι **υπάρχει** σταθερά c, ώστε $f(x)+\int_0^1 f(x)dx=ce^x$, $x\in R$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\left(1+\int_0^1 f(t)\,dt\right)e^x-\int_0^1 f(t)\,dt$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(t)\,dt=\frac{1-e}{e-3}$

ξ.**26**● Αν $f'(x)<1$, για κάθε $x\in[0,\kappa]$ και $f(0)=0$, δείξτε ότι $2\int_0^\kappa f(x)\,dx\le\kappa^2$

ξ.**27**● Για τη συνεχή στο R συνάρτηση f, δείξτε ότι $\int_0^3 f^2(x)\,dx\ge 6\int_0^3 f(x)\,dx-27$

ξ.**28**● Έστω η **συνεχής** στο R συνάρτηση f, ώστε $f(x)=x^3+x^2\int_0^1 f(x)\,dx$, $x\in R$

Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+\frac{3}{8}x^2$, $x\in R$